BAB II
LANDASAN TEORI

Landasan teori yang akan digunakan yang berkaitan dengan pembahasan pada Bab IV tentang matriks dan operasi matriks, *trace* matriks, determinan serta beberapa definisi dan teorema.

2.1 Matriks dan Jenis-Jenis Matriks

Definisi 2.1 (Anton, 1987) Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Matriks dengan m baris dan n kolom disebut matriks $m \times n$. Matriks dengan jumlah baris dan jumlah kolom yang sama disebut matriks bujur sangkar. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif, dinyatakan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Terdapat beberapa jenis-jenis matriks, diantaranya adalah :

a. Matriks Diagonal

Suatu matriks bujursangkar yang semua entrinya yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol disebut matriks diagonal. Bentuk matriks diagonal :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

b. Matriks Segitiga

Matriks bujur sangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah (*lower triangular*) dan matriks bujursangkar yang semua entri dibawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas (*upper triangular*).

1) Bentuk matriks segitiga atas (*upper triangular*)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

2) Bentuk matriks segitiga bawah (*lower triangular*)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

c. Matriks Simetris

Suatu matriks bujursangkar dikatakan simetris jika $A = A^T$ dengan $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua nilai dari i dan j. Bentuk matriks simetris untuk ordo 3×3 dan 4×4 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

dan

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Berikut akan diberikan definisi dan teorema mengenai perkalian matriks dan perpangkatan matriks yang akan digunakan untuk menentukan *trace* dari matriks yang berpangkat.

2.2 Perkalian Matriks

Definisi 2.2 (Rosen, 2007) Misalkan A adalah matriks $m \times k$ dan B adalah matriks $k \times n$. Perkalian A dan B, dinotasikan dengan AB adalah matriks $m \times n$ dengan entri ke-(i, j) sama dengan jumlah perkalian dari elemen yang bersesuian dari baris ke-i dari A dan kolom ke-j dari B. Dengan kata lain, jika $AB = [c_{ij}]$, maka

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} \tag{2.2}$$

Teorema 2.1 (Larson, 2013) Jika A, B dan C adalah matriks dan c adalah skalar, maka sifat berikut ini benar.

i. $(AB)C = A(BC)$ (hukum asosiatif pada perkalian matriks)
ii. $A(B + C) = AB + AC$ (hukum distributif kiri)
iii. $(A + B)C = AC + BC$ (hukum distributif kanan)
iv. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

Definisi 2.3 (Anton, 1987) Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif A menjadi

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n\ faktor} \quad (n > 0).$$

Akan tetapi, jika A dapat dibalik, maka dapat didefinisikan pangkat bilangan bulat negatif menjadi

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\dots A^{-1}}_{n\ faktor}.$$

Teorema berikut merupakan sifat-sifat yang berhubungan dengan Definisi 2.3.

Teorema 2.2 (Anton, 1987) Jika A adalah matriks kuadrat dan r serta s adalah bilangan bulat, maka berlaku:

i. $A^r A^s = A^{r+s}$.
ii. $(A^r)^s = A^{rs}$.

Berikut diberikan definisi dan teorema dari determinan dan sifat-sifat determinan.

2.3 Determinan

Definisi 2.4 (Anton, 1987) Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan kita definisikan $\det(A)$ sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Jumlah $\det(A)$ kita namakan determinan A.

$$\det(A) = \sum \pm a_{1_{j1}} a_{2_{j2}} \cdots a_{n_{jn}} \tag{2.3}$$

dimana $\sum$ menunjukkan bahwa suku-suku tersebut harus dijumlahkan terhadap semua permutasi $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ dan simbol $+$ atau $-$ dapat dipilih dalam masing-masing suku sesuai dengan apakah permutasi itu genap atau ganjil. Notasi ini akan berguna ketika definisi determinan dibutuhkan sesuai kepentingannya.

Contoh 2.1

Daftarkanlah semua hasil kali elementer bertanda dari matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Hasil kali elementer	Permutasi terasosiasi	Genap atau ganjil	Hasil kali elementer bertanda
$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$	(1,2,3,4)	genap	$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$
$a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$	(1,2,4,3)	ganjil	$-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$
$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$	(1,3,2,4)	ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$
$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$	(1,3,4,2)	genap	$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$
$a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$	(1,4,2,3)	genap	$a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$
$a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$	(1,4,3,2)	ganjil	$-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$
$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$	(2,1,3,4)	ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$
$a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$	(2,1,4,3)	genap	$a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$
$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$	(2,3,1,4)	genap	$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$
$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$	(2,3,4,1)	ganjil	$-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$
$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$	(2,4,1,3)	ganjil	$-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$
$a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$	(2,4,3,1)	genap	$a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$
$a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$	(3,1,2,4)	genap	$a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$
$a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$	(3,1,4,2)	ganjil	$-a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$
$a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$	(3,2,1,4)	ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$
$a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$	(3,2,4,1)	genap	$a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$
$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$	(3,4,1,2)	genap	$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$
$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$	(3,4,2,1)	ganjil	$-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$
$a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$	(4,1,2,3)	ganjil	$-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$
$a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$	(4,1,3,2)	genap	$a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$
$a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$	(4,2,1,3)	genap	$a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$

$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$	(4,2,3,1)	ganjil	$-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$
$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$	(4,3,1,2)	ganjil	$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$
$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$	(4,3,2,1)	genap	$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

Determinan matriks 4×4 dapat ditentukan dengan menggunakan metode OBE.

Teorema berikut menjelaskan sifat-sifat determinan dari suatu matriks bujur sangkar.

Teorema 2.3 (Anton, 1987) Jika A adalah sebarang matriks kuadrat berukuran $n \times n$ dan k adalah sebarang skalar, maka berlaku:

i. $\det(A) = \det(A^T)$.
ii. $\det(kA) = k^n \det(A)$.
iii. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Teorema 2.4 (Anton, 1987) Sebuah matriks A kuadrat dapat dibalik jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Selanjutnya akan diberikan pembahasan mengenai invers matriks dan sifat-sifat dari invers matriks.

2.4 Invers Matriks

Definisi 2.5 (Anton, 1987) Matriks bujur sangkar $A_{n\times n}$ mempunyai invers jika ada matriks B sehingga berlaku hubungan $AB = BA = I_n$ matriks B disebut sebagai invers dari matriks A atau sebaliknya.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ dengan syarat $\det(A) \neq 0$.

Sifat-sifat Invers matriks:

a. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

b. $(kA)^{-1} = (1/k)A^{-1}$ dimana k skalar (bilangan rill)

c. $(A)^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{sebanyak\,n\,kali} = \underbrace{AA\cdots A}_{sebanyak\,n\,kali}$, jika $n = 1,2,\ldots$

Selanjutnya akan diberikan pembahasan mengenai *trace* matriks beserta contoh pada bilangan real dan bilangan kompleks.

2.5 Trace Matriks

Definisi 2.6 (Gentle, 2007) Misalkan $A = [a_{ij}]$ suatu matriks persegi berukuran $n \times n$, maka *trace* dari matriks A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal matriks A dan dinotasikan dengan $tr(A)$. Dinyatakan bahwa *trace* matriks A adalah:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{2.4}$$

Contoh 2.2 : Diberikan matriks 3 × 3 sebagai berikut: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & 4 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

Hitunglah nilai *trace* dari matriks A ?

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} tr(A) &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ &= 2 + (-2) + 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Contoh 2.3 : Diberikan matriks 2×2 dengan entri-entri bilangan kompleks sebagai berikut: $A = \begin{bmatrix} 3-2i & 2+4i \\ 6-i & 5+4i \end{bmatrix}$

Hitunglah nilai *trace* dari matriks A ?

Penyelesaian :

$$
\begin{aligned}
tr(A) &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\
&= (3 - 2i) + (5 + 4i) \\
&= (3 + 5) + (-2i + 4i) \\
&= 7 + 2i
\end{aligned}
$$

Teorema berikut menjelaskan sifat-sifat *trace* matriks dari matriks bujur sangkar.

Teorema 2.5 (Gentle, 2007) Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar dengan orde yang sama dan c adalah skalar, maka berlaku:

i. $tr(A) = tr(A^T)$.
ii. $tr(cA) = c\, tr(A)$.
iii. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.
iv. $tr(AB) = tr(BA)$.

Bukti. Diberikan matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

maka $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{mn}$ (2.5)

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

maka $tr(B) = b_{11} + b_{22} + \dots + b_{mn}$ (2.6)

i. Akan ditunjukkan bahwa $tr(A) = tr(A^T)$. *Transpose* dari matriks A, yaitu :

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga $tr(A^T) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ (2.7)

Berdasarkan persamaan (2.5) dan (2.7) maka terbukti:

$$tr(A) = tr(A^T).$$

ii. Akan ditunjukkan bahwa $tr(cA) = c\,tr(A)$. Untuk c adalah sebarang skalar, diperoleh:

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{aligned} tr(cA) &= ca_{11} + ca_{22} + \cdots + ca_{nn} \\ &= c(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ &= c\,tr(A) \end{aligned}$$

Oleh karena itu, telah terbukti $tr(cA) = c\,tr(A)$.

iii. Akan ditunjukkan bahwa $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$. Berdasarkan matriks A dan B, maka :

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$tr(A+B)=a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22}+\cdots+a_{nn}+b_{nn} \tag{2.8}$$

sehingga

$$tr(A+B)=a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22}+\cdots+a_{nn}+b_{nn}$$

$$=(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})+(b_{11}+b_{22}+\cdots+b_{nn})$$

$$=tr(A)+tr(B).$$

Oleh karena itu, telah terbukti bahwa $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$.

iv. Akan ditunjukkan bahwa $tr(AB)=tr(BA)$. Dari matriks A dan B maka di peroleh:

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+\cdots+a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots+a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\cdots+a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+\cdots+a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{aligned} tr(AB) &= (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1})+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2}) \\ &\quad +\cdots+(a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+\cdots+a_{nn}b_{nn}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

dan selanjutnya untuk

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+\cdots+b_{1n}a_{n1} & b_{11}a_{12}+b_{22}a_{21}+\cdots+b_{1n}a_{n2} & \cdots & b_{11}a_{1n}+b_{12}a_{2n}+\cdots+b_{1n}a_{nn} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21}+\cdots+b_{2n}a_{n1} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+\cdots+b_{2n}a_{n2} & \cdots & b_{21}a_{1n}+b_{22}a_{2n}+\cdots+b_{2n}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}a_{11}+b_{n2}a_{21}+\cdots+b_{nn}a_{n1} & b_{n1}a_{22}+b_{n2}a_{21}+\cdots+b_{nn}a_{n2} & \cdots & b_{n1}a_{1n}+b_{n2}a_{2n}+\cdots+b_{nn}a_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{aligned} tr(BA) &= (b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+\cdots+b_{1n}a_{n1})+(b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+\cdots+b_{2n}a_{n2}) \\ &\quad +\cdots+b_{n1}a_{1n}+b_{n2}a_{2n}+\cdots+b_{nn}a_{nn} \\ &= b_{11}a_{11}+b_{21}a_{12}+\cdots+b_{n1}a_{1n}+b_{12}a_{21}+b_{22}a_{22}+\cdots+b_{2n}a_{n2}+b_{1n}a_{n1} \\ &\quad +b_{n2}a_{2n}+\cdots+b_{nn}a_{nn} \\ &= (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1})+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2}) \\ &\quad +\cdots+(a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+\cdots+a_{nn}b_{nn}) \qquad (2.10) \\ &= tr(AB) \end{aligned}$$

■

Diberikan contoh untuk menentukan *trace* matriks 2 x 2 berpangkat bilangan bulat positif untuk *n* genap dan *n* ganjil.

Contoh 2.4 : Tentukan $tr(A^8)$ dan $tr(A^5)$ dari matriks berikut: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

Untuk mendapatkan trace matriks tersebut, maka matriks harus dikalikan sebanyak 8 kali sehingga diperoleh:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 15 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = A^3 \times A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 25 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = A^4 \times A^2 = \begin{bmatrix} 11 & 15 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 40 \\ -8 & -11 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = A^6 \times A^2 = \begin{bmatrix} 29 & 40 \\ -8 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76 & 105 \\ -21 & -29 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh:

$$tr(A^8) = 76 + (-29) = 47$$

$$tr(A^5) = 18 + (-7) = 11$$

Berikut akan diberikan pembahasan mengenai *trace* matriks 2 x 2 berpangkat bilangan bulat positif dan langkah-langkah pembentukan persamaan Pahade.

2.6 *Trace* Matriks 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pada tahun 2015, pembahasan mengenai *trace* suatu matriks telah dibahas oleh Pahade dalam makalahnya yang berjudul *trace of positive integer power of real* 2×2 *matrices.* Makalah tersebut membahas mengenai rumus umum *trace* dari matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Berikut diberikan langkah-langkah pembentukan Persamaan Pahade:

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \forall \quad a,b,c,d \in R$

2. Menentukan $tr(A)$ dan $\det(A)$.

   Berdasarkan Definisi 2.3 dan Definisi 2.4 diperoleh:

$$tr(A) = a + d \tag{2.11}$$

dan

$$\det(A) = ad - bc \tag{2.12}$$

3. Menentukan *trace* (A^2) sampai *trace* (A^8).

   Berdasarkan Definisi 2.2 di peroleh matriks A^2 yaitu:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Persamaan (2.11) dan Persamaan (2.12) dapat ditentukan $tr(A^2)$ yaitu:

$$tr(A^2) = (a^2 + bc) + (bc + d^2)$$

$$= a^2 + 2bc + d^2$$

$$= a^2 + 2ad + d^2 - 2ad + 2bc$$

$$= (a+d)^2 - 2(ad - bc)$$

$$tr(A^2) = (tr(A))^2 - 2\det(A) \tag{2.13}$$

Berdasarkan Definisi 2.2 di peroleh matriks A^3 yaitu:

$$A^3 = A^2 A$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^3+abc+bc(a+d) & a^2b+b^2c+bd(a+d) \\ ac(a+d)+bc^2+cd^2 & bc(a+d)+bcd+d^3 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan Persamaan (2.11) dan Persamaan (2.12) dapat ditentukan $tr(A^3)$ yaitu:

$$tr(A^3) = (a^3+abc+bc(a+d)) + (bc(a+d)+bcd+d^3)$$

$$= a^3+abc+bc(a+d)+bc(a+d)+bcd+d^3$$

$$= a^3+d^3+3bc(a+d)$$

$$= a^3+d^3+3ad(a+d)-3ad(a+d)+3bc(a+d)$$

$$= (a+d)^3-3(a+d)(ad-bc)$$

$$tr(A^3) = (tr(A))^3 - 3(\det(A))(tr(A)) \qquad (2.14)$$

Berdasarkan Definisi 2.2 di peroleh matriks A^4 yaitu:

$$A^4 = A^3 A$$

$$= \begin{bmatrix} a^3+abc+bc(a+d) & a^2b+b^2c+bd(a+d) \\ ac(a+d)+bc^2+cd^2 & bc(a+d)+bcd+d^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a^2+bc)^2+(ab+bd)(ac+cd) & (a^2+bc)(ab+bd)+(ab+bd)(bc+d^2) \\ (ca+dc)(a^2+bc)+(bc+d^2)(ca+dc) & (ab+bd)(ca+dc)+(bc+d^2)^2 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan Persamaan (2.11) dan Persamaan (2.12) dapat ditentukan $tr(A^4)$ yaitu:

$$tr(A^4) = ((a^2+bc)^2+(ab+bd)(ac+cd)) + ((ab+bd)(ca+dc)+(bc+d^2)^2)$$

$$= a^4+2a^2bc+b^2c^2+2abdc+2a^2bc+b^2c^2+2bd^2c+2abdc+2bd^2c+d^4$$

$$= a^4+4a^2bc+2b^2c^2+4abdc+4bd^2c+d^4$$

$$= (a+d)^4-4(a+d)^2(ad-bc)+2(ad-bc)^2$$

$$= (tr(A))^4-4(tr(A))^2(\det(A))+2(\det(A))^2 \qquad (2.15)$$

Berdasarkan Definisi 2.2 di peroleh matriks A^6 yaitu:

$$A^6 = A^4 A^2$$

dengan menggunakan Persamaan (2.11) dan Persamaan (2.12) dapat ditentukan $tr(A^6)$ yaitu:

$$\begin{aligned}
tr(A^6) = {} & \left((a^2+bc)^2 + (ab+bd)(ca+dc)\right)(a^2+bc) + \left((a^2+bc)(ab+bd) + (ab+bd)(bc+d^2)\right) \\
& (ca+dc) + \left((ca+dc)(a^2+bc) + (bc+d^2)(ca+dc)\right)(ab+bd) + ((ab+bd)(ca+dc) + \\
& (bc+d^2)^2)(bc+d^2) \\
= {} & a^6 + 6a^3bdc + 12ab^2dc^2 + 6bd^2ca^2 + 6abd^3c + 9a^2b^2c^2 + 6a^4bc + 9b^2d^2c^2 \\
& + 6bd^4c + 2b^3c^3 + d^6 \\
= {} & (a+d)^6 - 6(ad-bc)(a+d)^2[(a+d)^2 - 2(ad-bc)] - 8(ad-bc)^3 - 3(ad-bc)^2(a+d)^2 \\
& + 6(ad-bc)^3 \\
= {} & (tr(A))^6 - 6(\det(A))(tr(A))^2[(tr(A))^2 - 2\det(A)] - 8(\det(A))^3 - 3(\det(A))^2(tr(A))^2 \\
& + 6(\det(A))^3 \\
= {} & (tr(A))^6 - 6(\det(A))(tr(A))^4 + 9(\det(A))^2(tr(A))^2 - 2(\det(A)) \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.2 di peroleh matriks A^8 yaitu:

$$A^8 = A^4 A^4$$

dengan menggunakan Persamaan (2.11) dan Persamaan (2.12) dapat ditentukan $tr(A^8)$ yaitu:

$$\begin{aligned}
tr(A^8) = {} & \left((a^2+bc)^2 + (ab+bd)(ca+dc)\right)^2 + 2((a^2+bc)(ab+bd) + (ab+bd)(bc+d^2)) \\
& \left((ca+dc)(a^2+bc) + (bc+d^2)(ca+dc)\right) + \left((ab+bd)(ca+dc) + (bc+d^2)^2\right)^2 \\
= {} & a^8 + 8a^5bdc + 8a^4bd^2c + 32a^3b^2c^2d + 36a^2b^2c^2d^2 + 24b^3c^3ad + 32ab^2d^3c^2 + 8a^3bd^3c \\
& + 8a^2bd^4c + 8abd^5c + 20b^2d^4c^2 + 16b^3c^3d^2 + 20a^4b^2c^2 + 8a^6bc + 16a^2b^3c^3 + 8bd^6c \\
& + 2b^4c^4 + d^8 \\
= {} & (a+d)^8 - 8(ad-bc)(a+d)^2[(a+d)^4 + 4(ad-bc)^2] + 16(ad-bc)^4 \\
& + 24(ad-bc)^2(a+d)^4 - 4(ad-bc)^2[(a+d)^4 - 4(ad-bc)(a+d)^2 \\
& + 4(ad-bc)^2] + 2(ad-bc)^4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (tr(A))^8 - 8(\det(A))(tr(A))^2[(tr(A))^4 + 4(\det(A))^2] + 16(\det(A))^4 \\
&\quad + 24(\det(A))^2(tr(A))^4 - 4(\det(A))^2[(tr(A))^4 - 4(\det(A))(tr(A))^2 \\
&\quad + 4(\det(A))^2] + 2(\det)A))^4 \\
&= (tr(A))^8 - 8(\det(A))(tr(A))^6 + 20(\det(A))^2(tr(A))^4 \\
&\quad - 16(\det(A))^3(tr(A))^2 + 2(\det(A))^4 \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

dengan melihat kembali Persamaan (2.13), (2.15), (2.16) dan (2.17) maka dapat dibentuk menjadi:

$$
tr(A^2) = \frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0(tr(A))^{2-2\times 0} + \frac{(-1)^1}{1!}2(\det(A))^1(tr(A))^{2-2\times 1}
$$

$$
\begin{aligned}
tr(A^4) = {}& \frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0(tr(A))^{4-2\times 0} + \frac{(-1)^1}{1!}4(\det(A))^1(tr(A))^{4-2\times 1} + \frac{(-1)^2}{2!}4(4-3) \\
& (\det(A))^2(tr(A))^{4-2\times 2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
tr(A^6) = {}& \frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0(tr(A))^{6-2\times 0} + \frac{(-1)^1}{1!}6(\det(A))^1(tr(A))^{6-2\times 1} + \frac{(-1)^2}{2!}6(6-3) \\
& (\det(A))^2(tr(A))^{6-2\times 2} + \frac{(-1)^3}{3!}6(6-4)(6-5)(\det(A))^3(tr(A))^{6-2\times 3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
tr(A^8) = {}& \frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0(tr(A))^{8-2\times 0} + \frac{(-1)^1}{1!}8(\det(A))^1(tr(A))^{8-2\times 1} + \frac{(-1)^2}{2!}8(8-3) \\
& (\det(A))^2(tr(A))^{8-2\times 2} + \frac{(-1)^3}{3!}8(8-4)(8-5)(\det(A))^3(tr(A))^{8-2\times 3} \\
& + \frac{(-1)^4}{4!}8(8-5)(8-6)(8-7)(\det(A))^4(tr(A))^{8-2\times 4}
\end{aligned}
$$

sehingga dapat dibentuk kerumus umum $tr(A^n)$ untuk n genap yaitu:

$$
\begin{aligned}
tr(A^n) = {}& \frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0(tr(A))^{n-2\times 0} + \frac{(-1)^1}{1!}n(\det(A))^1(tr(A))^{n-2\times 1} + \cdots \\
& + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!}n\left[n-(\frac{n}{2}+1)\right]\left[n-(\frac{n}{2}+2)\right]\cdots\left[n-(\frac{n}{2}+(\frac{n}{2}-1))\right](\det(A))^{\frac{n}{2}}(tr(A))^{n-2\times\frac{n}{2}} \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

dengan menyederhanakan Persamaan (2.18) maka diperoleh:

$$tr(A^n)=\sum_{r=0}^{n/2}\frac{(-1)^r}{r!}n\left[n-(r+1)\right]\left[n-(r+2)\right]\cdots\left[n-(r+(r-1))\right](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r} \qquad (2.19)$$

Persamaan (2.19) adalah persamaan untuk *trace* matriks *2×2* berpangkat bilangan bulat positif genap.

Selanjutnya akan dibentuk persamaan *trace* matriks *2 × 2* berpangkat bilangan bulat positif ganjil, berikut diberikan langkah-langkahnya:

1. Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \forall \quad a,b,c,d \in R$
2. Menentukan *trace* (A^3) sampai *trace* (A^7).

   Berdasarkan Definisi 2.2 di peroleh matriks A^5 yaitu:

$$A^5 = A^3A^2$$

$$=\begin{bmatrix} a^3+abc+bc(a+d) & a^2b+b^2c+bd(a+d) \\ ac(a+d)+bc^2+cd^2 & bc(a+d)+bcd+d^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Persamaan (2.11) dan Persamaan (2.12) dapat ditentukan $tr(A^5)$ yaitu:

$$tr(A^5)=\Big((a^2+bc)[a^3+abc+bc(a+d)]+[c(a+d)][a^2b+b^2c+bd(a+d)\Big)$$
$$+\Big([b(a+d)][ac(a+d)+bc^2+cd^2]+(bc+d^2)[bc(a+d)+bcd+d^3]\Big)$$

$$=a^5+d^5+5bc(a+d)^3-5a^2d^2(a+d)-5ad(a+d)^3+5a^2d^2(a+d)+5bc(a+d)^3$$
$$-10abcd(a+d)+b^2c^2(a+d)$$
$$=(a+d)^5-5(ad-bc)(a+d)^3-5(ad-bc)^2(a+d)$$

$$=(tr(A))^5-5(\det(A))(tr(A))^3+5(\det(A))^2(tr(A)) \qquad (2.20)$$

Berdasarkan Definisi 2.2 di peroleh matriks A^7 yaitu:

$$A^7 = A^4A^3$$

$$= \begin{bmatrix} (a^2+bc)^2+(ab+bd)(ca+bd) & (a^2+bc)(ab+bd)+(ab+bd)(bc+d^2) \\ (ca+dc)(a^2+bc)+(bc+d^2)(ca+dc) & (ab+bd)(ca+dc)+(bc+d^2)^2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a^3+abc+bc(a+d) & a^2b+b^2c+bd(a+d) \\ ac(a+d)+bc^2+cd^2 & bc(a+d)+bcd+d^3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Persamaan (2.11) dan Persamaan (2.12) dapat ditentukan $tr(A^7)$ yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A^7) &= \big((a^2+bc)^2+(ab+bd)(ca+dc)\big)\big((a^2+bc)a+(ab+bd)c\big)+((a^2+bc)(ab+bd)+ \\ &\quad (ab+bd)(bc+d^2))\big((ca+dc)a+(bc+d^2)c\big)+\big((ca+dc)(a^2+bc)+(bc+d^2)(ca+dc)\big) \\ &\quad \big((a^2+bc)b+(ab+bd)d\big)+\big((ab+bd)(ca+dc)+(bc+d^2)^2\big)\big((ca+dc)b+(bc+d^2)d\big) \\ &= a^7+7a^4bdc+21a^2b^2c^2d+21ab^2c^2d^2+7bd^2ca^3+7a^2bd^3c+7abcd^4+7a^5bc \\ &\quad +14a^3b^2c^2+7b^3c^3a+7b^3c^3d+14b^2d^3c^2+d^7 \\ &= (a+d)^7-6(ad-bc)(a+d)^5+14(ad-bc)^2(a+d)^2-7(ad-bc)^3(a+d) \\ &= (tr(A))^7-6(\det(A))(tr(A))^5+14(\det(A))^2(tr(A))^2-7(\det(A))^3(tr(A)) \qquad (2.21) \end{aligned}$$

dengan melihat kembali Persamaan (2.14), (2.20) dan (2.21) maka dapat dibentuk menjadi :

$$tr(A^3) = \frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0(tr(A))^{3-2\times 0}+\frac{(-1)^1}{1!}3(\det(A))^1(tr(A))^{3-2\times 1}$$

$$\begin{aligned} tr(A^5) &= \frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0(tr(A))^{5-2\times 0}+\frac{(-1)^1}{1!}5(\det(A))^1(tr(A))^{5-2\times 1}+\frac{(-1)^2}{2!}5(5-3) \\ &\quad (\det(A))^2(tr(A))^{5-2\times 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} tr(A^7) &= \frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0(tr(A))^{7-2\times 0}+\frac{(-1)^1}{1!}7(\det(A))^1(tr(A))^{7-2\times 1}+\frac{(-1)^2}{2!}7(7-3) \\ &\quad (\det(A))^2(tr(A))^{7-2\times 2}+\frac{(-1)^3}{3!}7(7-4)(7-5)(\det(A))^3(tr(A))^{7-2\times 3} \end{aligned}$$

sehingga dapat dibentuk kerumus umum $tr(A^n)$ untuk n ganjil yaitu:

$$tr(A^n) = \frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0 (tr(A))^{n-2\times 0} + \frac{(-1)^1}{1!} n(\det(A))^1 (tr(A))^{n-2\times 1} + \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} n\left[n-(\frac{n}{2}+1)\right]\left[n-(\frac{n}{2}+2)\right]\cdots\left[n-(\frac{n}{2}+(\frac{n}{2}-1))\right](\det(A))^{\frac{n}{2}}(tr(A))^{n-2\times\frac{n}{2}} \quad (2.22)$$

dengan menyederhanakan Persamaan (2.22) maka diperoleh:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r} \quad (2.23)$$

Berikut diberikan contoh yang berhubungan dengan Persamaan (2.19) dan (2.23).

Contoh 2.5 : Tentukan $tr(A^8)$ dan $tr(A^5)$ dari matriks berikut: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$tr(A) = 3 + (-2) = 1$$

dan

$$\det(A) = -6 - (-5) = -1$$

Sehingga menurut Persamaan (2.19) diperoleh:

$$tr(A^8) = (tr(A))^8 - 8(\det(A))(tr(A))^6 + 20(\det(A))^2(tr(A))^4 - 16(\det(A))^3(tr(A))^2 + 2(\det(A))^4$$

$$= (1)^8 - 8(-1)(1)^6 + 20(-1)^2(1)^4 - 16(-1)^3(1)^2 + 2(-1)^4$$

$$= 47$$

Dan menurut Persamaan (2.23) diperoleh:

$$tr(A^5) = (tr(A))^5 - 5(\det(A))(tr(A))^3 + 5(\det(A))^2(tr(A))$$

$$= (1)^5 - 5(-1)(1)^3 + 5(-1)^2(1)$$

$$= 11$$

Selanjutnya diberikan pembahasan mengenai bilangan kompleks karena matriks yang akan dibahas selain dengan entri-entri bilangan riil juga dengan entri-entri bilangan kompleks.

2.7 Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah suatu pasangan terurut bilangan riil, yang dinyatakan dengan $z = x + iy$ dimana x dan y adalah bilangan riil, dan i adalah adalah bilangan imajiner yang mempunyai sifat $i^2 = -1$. Bilangan riil x disebut juga bagian riil dari bilangan kompleks, dan bilangan riil y disebut bagian imajiner dari bilangan kompleks. Berikut diberikan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada bilangan kompleks :

a. Penjumlahan

Jika $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$

maka :

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \end{aligned}$$

b. Pengurangan

Jika $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$

maka :

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + iy_1) - x_2 - iy_2 \\ &= (x_1 - x\ \ ) + (iy_1 - iy_2) \\ &= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \end{aligned}$$

c. Perkalian

Jika $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$

maka :

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (x_1 + iy_1) \times (x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + x_1iy_2 + x_2iy_1 + iy_1iy_2 \end{aligned}$$

$$= x_1x_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)i + y_1y_2i^2$$
$$= x_1x_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)i - y_1y_2$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$$

d. Pembagian

Jika $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$

maka :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{(x_2 - iy_2)}{(x_2 - iy_2)}$$
$$= \frac{x_1x_2 - x_1iy_2 + x_2iy_1 - y_1y_2i^2}{{x_2}^2 - x_2iy_2 + x_2iy_2 - {y_2}^2i^2}$$
$$= \frac{x_1x_2 + (y_1x_2 - x_1y_2)i + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + \frac{(y_1x_2 - x_1y_2)i}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$

Berikut diberikan contoh untuk operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada bilangan kompleks :

Contoh 2.6

Diberikan $z_1 = 5 - 3i$

$z_2 = -2 + 5i$

Tentukan: a. $z_1 + z_2$

b. $z_1 - z_2$

c. $z_1 \times z_2$

d. $\frac{z_1}{z_2}$

Penyelesaian :

a. Penjumlahan

Jika $z_1 = 5 - 3i$ dan $z_2 = -2 + 5i$

maka :

$$z_1 + z_2 = (5 - 3i) + (-2 + 5i)$$

$$= (4-2)+(-3+5)i$$
$$= 2+2i$$

b. Pengurangan

Jika $z_1 = 5-3i$ dan $z_2 = -2+5i$

maka :

$$z_1 - z_2 = (5-3i)-(-2+5i)$$
$$= (5-3i)+2-5i$$
$$= (5+2)+(-3-5)i$$
$$= 7-8i$$

c. Perkalian

$$z_1 \times z_2 = (5-3i)\times(-2+5i)$$
$$= (5)(-2)+(5)(5i)+(-3i)(-2)+(-3i)(5i)$$
$$= (-10)+(25i)+(6i)+15$$
$$= 5+31i$$

d. Pembagian

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-3i}{-2+5i}\times\frac{(-2-5i)}{(-2-5i)}$$
$$= \frac{(5)(-2)-(5)(5i)+(-2)(-3i)-(-3i)(5i)}{(-2)^2-(-2)(5i)+(-2)(5i)-(5^2 i^2)}$$
$$= \frac{(-10)-(25-6)i-15}{4+25}$$
$$= \frac{-10-15}{4+25}-\frac{(25-6)i}{4+25}$$
$$= \frac{-25}{29}-\frac{19i}{29}$$

Selanjutnya akan diberikan pembahasan mengenai pemangkatan bilangan kompleks beserta contoh.

2.8 Pemangkatan Bilangan Kompleks

Selain dinyatakan dalam bentuk $z = x+iy = (x, y)$, bilangan kompleks z dapat dinyatakan pula dalam bentuk koordinat kutub atau polar, yaitu $z = (r, \theta)$. Adapun hubungan antara keduanya, (x, y) dan (r, θ) adalah:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

dengan $\theta = arc\tan\left(\frac{y}{x}\right)$ dan $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Jadi, bentuk kutub bilangan kompleks z adalah $z = (r,\theta) = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$. dan sekawan dari z adalah $z = (r,-\theta) = r\,(\cos\theta - i\sin\theta)$.

Telah diketahui bahwa bilangan kompleks dalam bentuk kutub adalah $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Jika $z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, maka diperoleh hasil perkalian keduanya sebagai berikut :

$$z_1\,z_2 = [r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)][r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$$

$$z_1\,z_2 = r_1\,r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i\,(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$z_1\,z_2 = r_1\,r_2\,[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Dari hasil perkalian tersebut diperoleh :

$$\arg\,(z_1\,z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

Jika diketahui :

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$\vdots$$

$z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$, untuk n bilangan asli,

maka diperoleh rumus perkalian :

$$z_1\,z_2\ldots z_n = r_1\,r_2\ldots r_n[\cos\,(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\theta_n) + i\sin\,(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\theta_n)].$$

Akibatnya jika, $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ maka

$$\underbrace{z\cdot z\cdot z\cdots z}_{n\ kali} = \underbrace{r\cdot r\cdot r\cdots r}_{n\ kali}\,[(\cos\,(\theta + \theta + \cdots\theta) + i\,(\sin(\theta + \theta + \cdots\theta)))]$$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad (2.13)$$

Berikut diberikan contoh perpangkatan dalam bilangan kompleks :

Contoh 2.7

Hitunglah : $(\sqrt{3} - i)^{-6}$

Penyelesaian :

Misalkan $z = \sqrt{3} - i$, maka $r = |z| = \sqrt{3+1} = 2$, $\tan\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$

$$\theta = -30°$$

Karena z di kuadran IV, maka dipilih $= -30° + 360°$

$$= 330°$$

Jadi, $z^n = r^n \left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$

$$\left(\sqrt{3} - i\right)^{-6} = 2^{-6}\left[\cos(6\times 330°) + i\sin(6\times 330°)\right]$$

$$= 2^{-6}\left[(-1) + 0\right]$$

$$= \left(-2^{-6}\right)$$

2.9 Induksi Matematika

Prinsip induksi sederhana berbunyi sebagai berikut : misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan proposisi ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 dinamakan basis induksi, sedangkan langkah 2 dinamakan langkah induksi. Langkah induksi asumsi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Contoh 2.8 : Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Penyelesaian:

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi yang menyatakan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2

(i) *Basis induksi:* $p(1)$ benar, karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$.

(ii) *Langkah induksi:* Misalkan $p(n)$ benar, yaitu asumsikan bahwa

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

adalah benar (hipotesis induksi).

Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)] + (2n + 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkan benar, maka jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.